

## STOCKAGE PERIODIQUE PAR CHALEUR LATENTE ASPECTS FONDAMENTAUX LIÉS A LA CINÉTIQUE DES TRANSFERTS†

J. BRANSIER

Laboratoire D'Aerothermique, Groupe "Echanges Thermiques", Université Pierre et Marie Curie,  
 Tour 66, 4, Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05, France

(Reçu le 20 Octobre 1978)

**Résumé**—On étudie le comportement thermique d'un élément de stockage fusible soumis à un fluide caloporteur dont la température varie sinusoidalement en fonction du temps. Deux cas ont été envisagés, celui de la plaque plane et celui du cylindre creux. La méthode numérique adoptée permet de traiter des problèmes multifronts.

On montre que de façon analogue au stockage par chaleur sensible il existe pour un matériau et une période donnés une épaisseur optimale pour laquelle l'énergie stockée par unité de surface d'échange est maximale. La géométrie cylindrique est légèrement plus défavorable que la géométrie plane, spécialement pour les faibles rayons intérieurs. Dans toutes les situations étudiées, on n'a jamais constaté plus de deux fronts simultanés. Par ailleurs l'épaisseur optimale correspond à un cas de fusion totale du stock.

### NOMENCLATURE

$b$ ,	$(\lambda c \rho)^{1/2}$ , effusivité thermique [J s <sup>-1/2</sup> m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup> ];
$B_i$ ,	$\frac{\alpha l}{\lambda_s}$ , nombre de Biot;
$c$ ,	chaleur spécifique [J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ];
$F_0$ ,	$\kappa_s \tau / l^2$ , nombre de Fourier;
$l$ ,	$R_e - R_i$ , épaisseur du matériau fusible [m];
$P_h$ ,	$c_s T_0 / \Delta h_f$ , nombre de changement de phase (Stefan);
$q$ ,	$Q/S$ , énergie (dé)stockée par unité de surface d'échange [J m <sup>-2</sup> ];
$Q$ ,	énergie (dé)stockée dans un élément de volume $V$ [J];
$\bar{Q}$ ,	énergie volumique (dé)stockée [J m <sup>-3</sup> ];
$Q_{\max}$ ,	énergie maximale stockable dans un volume $V$ [J];
$Q^*$ ,	$Q/Q_{\max}$ , taux d'utilisation du stock;
$R_i$ ,	rayon intérieur du cylindre [m];
$R_i^*$ ,	$R_i/l$ , rayon intérieur réduit du cylindre;
$R_e$ ,	rayon extérieur du cylindre [m];
$R_e^*$ ,	$R_e/l$ , rayon extérieur réduit du cylindre;
$S$ ,	surface d'échange avec le fluide caloporteur [m <sup>2</sup> ];
$t$ ,	temps [s];
$t^*$ ,	temps réduit;
$T$ ,	température du matériau fusible [K];
$T^*$ ,	$(T - T_{Ph})/T_0$ , température réduite du matériau fusible;
$T_{Ph}$ ,	température de changement de phase [K];
$T_0$ ,	amplitude de température du fluide caloporteur [K];
$T_m$ ,	température moyenne du fluide caloporteur [K];

$V$ ,	volume du matériau fusible [m <sup>3</sup> ];
$y$ ,	abscisse [m];
$y^*$ ,	abscisse réduite.

### Symboles grecs

$\alpha$ ,	coefficient de transfert superficiel [W m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup> ];
$\beta$ ,	$(\pi/F_0)^{1/2}$ paramètre adimensionnel;
$\gamma$ ,	$B_i/\beta$ , paramètre adimensionnel;
$\delta$ ,	$\beta R_i^*$ , paramètre adimensionnel;
$e_i$ ,	abscisse du front $i$ ;
$e_i^*$ ,	$e_i/l$ , abscisse réduite du front $i$ ;
$\kappa$ ,	$\lambda/\rho c$ , diffusivité thermique;
$\kappa^*$ ,	$\kappa_l/\kappa_s$ , rapport des diffusivités liquide/solide;
$\lambda$ ,	conductivité thermique [W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ];
$\lambda^*$ ,	$\lambda_l/\lambda_s$ , rapport des conductivités liquide/solide;
$\eta$ ,	$[1 + (\lambda^*/\kappa^*) + \rho^*/Ph]/2$ ;
$\Theta^*$ ,	$(T_{Ph} - T_m)/T_0$ , paramètre adimensionnel;
$\xi$ ,	$1 + 1/2R_i^*$ , paramètre adimensionnel;
$\rho$ ,	masse volumique [kg m <sup>-3</sup> ];
$\rho^*$ ,	rapport des masses volumiques liquide/solide;
$\tau$ ,	$2\pi/\omega$ , période [s];
$\omega$ ,	pulsation [s <sup>-1</sup> ];
$\Delta h_f$ ,	chaleur latente de fusion [J kg <sup>-1</sup> ];
$\Delta y^*$ ,	pas d'espace réduit;
$\Delta t^*$ ,	pas de temps réduit.

### Indices

$i$ ,	numéro du front;
$l$ ,	zone liquide;
$s$ ,	zone solide.

### 1. INTRODUCTION

CETTE étude fait suite aux travaux entrepris par Bardon *et al.* [1] sur le stockage périodique par chaleur sensible dans des matériaux de géométries

†An English traduction of this article can be obtained in writing at the present address: Laboratoire D'Aerothermique, Groupe "Echanges Thermiques", Tour 66—Bureau 315, 4 Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

simples telles que plaques, cylindres et sphères. Nous rappellerons donc très brièvement les raisons qui conduisent à envisager les problèmes de stockage sous cet aspect particulier.

Tout d'abord, il est clair que dans la plupart des applications qui nécessitant un stockage d'énergie sous forme thermique, il apparaît nettement un caractère périodique des opérations de charge et de décharge de l'accumulateur. Par ailleurs, les conditions d'échange avec le fluide caloporteur ainsi que la conduction dans le matériau de stockage tendent à limiter les performances des systèmes. Ce dernier facteur joue un rôle important dans le cas des milieux fusibles dont les conductivités sont souvent assez faibles.

Il s'agit donc, dans une première étape, d'élaborer un modèle aussi simple que possible qui permette d'étudier l'interaction des paramètres évoqués ci-dessus dans le cas d'un processus périodique, et de dégager le cas échéant des conditions d'optimisation du stockage. Afin de ne pas introduire un nombre trop important de paramètres qui serait préjudiciable à l'interprétation des résultats, il convient de choisir pour le fluide caloporteur une loi de variation de température schématique très simple qui satisfasse cependant au critère de périodicité. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi une loi sinusoïdale de la forme :

$$T_f = T_m + T_0 \sin \omega t. \quad (1)$$

Le matériau de stockage supposé fusible à température  $T_{ph}$  est assimilable soit à un élément plan d'épaisseur  $2l$  (Fig. 1a) soit à une couronne cylindrique d'épaisseur  $l = R_e - R_i$  (Fig. 1b). Dans le premier cas le fluide caloporteur circule de part et d'autre des deux faces de la plaque, dans le second cas il circule à l'intérieur du tuyau de rayon  $R_i$ , l'extérieur ( $y = R_e$ ) étant supposé parfaitement isolé. Pour l'élément considéré on admet que le coefficient

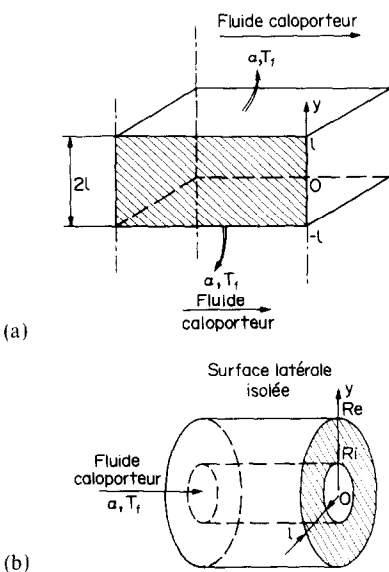


FIG. 1. Représentation schématique des modèles plans (a) et cylindriques (b).

de transfert superficiel  $\alpha$  est constant et uniforme.

Le but recherché consiste à savoir s'il existe, en régime périodique établi pour les matériaux fusibles, un critère d'optimisation des dimensions du stock analogue à celui qui a été mis en évidence dans le cas du stockage par chaleur sensible [1,2]. On s'intéresse également à la cinétique des fronts de fusion, aux profils de température dans les deux phases du matériau et aux conditions de déséquilibre des périodes de charge et de décharge.

Avant d'aborder la modélisation mathématique du problème il est bon de souligner dès à présent une particularité liée à la périodicité de la température du fluide caloporteur. En effet, on conçoit que pour un matériau et une période donnés, il puisse exister des cas où le stock n'est pas entièrement fondu avant le début de la phase de déstockage. Ceci se traduira par la naissance d'un second front solide-liquide qui se développera en direction du premier maintenant ainsi simultanément en présence au moins deux fronts. Dans des conditions expérimentales réelles, on peut facilement imaginer des processus où le nombre de fronts serait supérieur à deux (applications solaires à usage domestique, géothermiques, etc....).

II. MODELE MATHEMATIQUE

Les équations seront présentées dans le cas du cylindre, celui de la plaque étant obtenu commodément en adoptant une très grande valeur de  $R_i$  dans le schéma numérique.

En négligeant les variations des caractéristiques thermophysiques du milieu avec la température, la convection dans les phases liquides† et les phénomènes de dilatation liés aux écarts entre les masses volumiques du fluide et du liquide, les équations du problème peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \kappa_s \left( \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial T_s}{\partial y} \right) \quad (\text{phases solides}); \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} = \kappa_l \left( \frac{\partial^2 T_l}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial T_l}{\partial y} \right) \quad (\text{phases liquides}); \quad (3)$$

$$t = 0, \quad T_s = T_{ph} \quad (\text{Etat solide } \forall y); \quad (4)$$

$$y = R_i, \quad \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{R_i} = \alpha (T - T_f) \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} T_f &= T_{ph} + T_0 \sin \omega t \\ y = R_e, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{R_e} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{conditions aux limites}); \quad (6)$$

$$y = R_e, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{R_e} = 0 \quad (7)$$

$$y = \varepsilon_i, \quad \rho \cdot \Delta h_f \cdot \frac{d\varepsilon_i}{dt} = \lambda_s \left( \frac{\partial T_s}{\partial y} \right)_{\varepsilon_i} - \lambda_l \left( \frac{\partial T_l}{\partial y} \right)_{\varepsilon_i} \quad (\text{conditions aux interfaces } i). \quad (8)$$

† Cette hypothèse n'a été adoptée qu'en raison de la complexité qu'aurait apporté la convection dans un problème multifront. En effet Sparrow *et al.* [3], ont clairement montré que dans la période de fusion, les mouvements convectifs étaient importants et accroissaient notablement les transferts de chaleur tout en inclinant le front de fusion.

Dans les équations (5), (7) et (8),  $T$ ,  $\lambda$  et  $\rho$  sont à affecter des indices "l" ou "s" suivant le stade de l'évolution et la nature de la phase concernée. D'autre part, l'équation (6) suppose que la température moyenne du fluide caloporteur est égale à la température de fusion.

Si l'on introduit les variables adimensionnelles suivantes:

$$T^* = \frac{T - T_{Ph}}{T_0}; \quad y^* = \frac{y}{l}; \quad t^* = \frac{t}{\tau}; \quad (9)$$

$$R_e^* = \frac{R_e}{l}; \quad R_i^* = \frac{R_i}{l}; \quad \varepsilon_i^* = \frac{\varepsilon_i}{l}; \quad (10)$$

$$B_i = \frac{\alpha l}{\lambda_s}; \quad F_0 = \frac{\kappa_s \tau}{l^2}; \quad P_h = \frac{c_s T_0}{\Delta h_f}; \quad (11)$$

$$\kappa^* = \frac{\kappa_l}{\kappa_s}; \quad \lambda^* = \frac{\lambda_l}{\lambda_s}; \quad \rho^* = \frac{\rho_l}{\rho_s}; \quad (12)$$

(a) (b) (c)

le système d'équations (2) à (8) devient:

$$\frac{\partial T_s^*}{\partial t^*} = F_0 \left( \frac{\partial^2 T_s^*}{\partial y^{*2}} + \frac{1}{y^*} \cdot \frac{\partial T_s^*}{\partial y^*} \right) \quad (\text{phases solides}), \quad (13)$$

$$\frac{\partial T_l^*}{\partial t^*} = \kappa^* \cdot F_0 \left( \frac{\partial T_l^*}{\partial y^*} + \frac{1}{y^*} \cdot \frac{\partial T_l^*}{\partial y^*} \right) \quad (\text{phases liquides}), \quad (14)$$

$$t^* = 0; \quad T_s^* = 0 \quad (\text{état solide } \forall y), \quad (15)$$

$$y^* = R_i^*; \quad \left( \frac{\partial T_j^*}{\partial y^*} \right)_{R_i^*} = \frac{B_i}{\lambda} (T_j^* - \sin 2\pi t^*), \quad (16)$$

$$\bar{\lambda} = 1; \quad j = s \text{ si phase solide en } y^* = R_i^*, \\ \bar{\lambda} = \lambda^*; \quad j = l \text{ si phase liquide en } y^* = R_i^*,$$

$$y^* = R_e^*; \quad \left( \frac{\partial T_j^*}{\partial y^*} \right)_{R_e^*} = 0, \quad (17)$$

$$y^* = \varepsilon_i^*; \quad \frac{d\varepsilon_i^*}{dt} = \frac{F_0 \cdot P_h}{\bar{\rho}} \left[ \left( \frac{\partial T_s^*}{\partial y^*} \right)_{\varepsilon_i^*} - \lambda^* \left( \frac{\partial T_l^*}{\partial y^*} \right)_{\varepsilon_i^*} \right], \quad (18)$$

$$\bar{\rho} = 1 \rightarrow \text{fusion}, \\ \bar{\rho} = \rho^* \rightarrow \text{solidification}.$$

C'est ce système que nous résoudrons numériquement en tenant compte de la formation possible de plusieurs fronts.

### III. CHOIX DE LA METHODE

La diversité des domaines concernés par les problèmes de changement de phase explique l'abondance de la bibliographie sur ce sujet. Deux concepts d'approche très différents ont été utilisés. Le premier consiste à introduire des hypothèses simplificatrices qui conduisent alors soit à une formulation analytique explicite soit à la résolution par voie numérique d'équations intégral-différentielles ordinaires. Le second qui seul semblait envisageable dans notre cas repose sur des méthodes numériques de type différences finies ou éléments finis.

Un certain nombre d'auteurs [4-9] utilisent l'artifice de la chaleur spécifique apparente dans

laquelle la chaleur latente est prise en compte dans un petit intervalle de température  $\Delta T$  autour de  $T_{Ph}$  [10]. Le problème est alors ramené à la résolution d'une équation de diffusion non-linéaire mono-dimensionnelle [11]. Katayama [8] résoud cette équation par un schéma aux différences finies explicite, Bonacina *et al.* [7] utilisent le schéma à trois niveaux de Lees [12] tandis que Comini *et al.* [13], adoptent une méthode d'éléments finis. Dans tous les cas, on constate des oscillations dans les profils de température ainsi que dans le déplacement du front de fusion. Bien que théoriquement applicable à un problème multifront, nous avons préféré nous en tenir—dans une première étape—à une méthode plus conventionnelle qui puisse éventuellement servir de référence pour tester ultérieurement la méthode évoquée ci-dessus.

Eyres *et al.* [14] ont utilisé pour la première fois une méthode explicite à pas d'espace constant et front discontinu qui a servi dans de nombreux cas à tester des méthodes plus évoluées, notamment celle de Murray et Landis [15] qui consiste à introduire un maillage d'espace variable tout en maintenant constant le nombre de noeuds dans chacune des deux phases.

Cette technique a ensuite été reprise par Heitz et Westwater [16] pour étudier les effets des variations de masse volumique entre les deux phases ainsi que ceux de la convection dans la zone liquide. Crank [17] et Ehrlich [18] ont adopté une discrétisation d'espace d'ordre supérieur pour la condition limite à l'interface, au prix d'une plus grande complexité de programmation. Plus récemment, Rivard et Scott [19] ont tenu compte des variations des caractéristiques thermophysiques en fonction de la température dans le cas d'un problème particulier à trois zones. Ils adoptent pour cela un schéma de Crank-Nicolson couplé à la technique classique de projection itérative de Douglas. La position du front et le champ de température résultant sont obtenus par itération à chaque pas de temps. Mastanaiah [20] a développé une intéressante méthode faisant appel à une transformation sur la variable d'espace qui rend fixes les nouvelles frontières du problème. Le système d'équation aux dérivées partielles non linéaires ainsi obtenu est résolu par un schéma de Crank-Nicolson pour lequel les températures au pas de temps intermédiaire, sont calculées explicitement. Cette méthode ne peut malheureusement pas être étendue aux problèmes multifronts.

Pour le problème que nous avons à traiter, la connaissance précise de la position du front n'était pas essentielle. En revanche, la présence possible de plusieurs fronts nécessitait à chaque instant une localisation commode des différentes phases en présence. C'est la raison pour laquelle nous avons finalement opté pour une méthode conventionnelle à pas d'espace  $\Delta y^*$  constant et incrément de temps  $\Delta t^*$  variable, dans laquelle, le "front" d'épaisseur finie  $\Delta y^*$  se déplace d'une façon discontinue d'une maille à l'autre.

Le principe du calcul est le suivant: soit  $t^*$  un instant déterminé de l'évolution pour lequel le champ de températures et la position des fronts sont supposés connus. Après avoir fixé un incrément initial de temps  $\Delta t_0^*$ , on calcule, pour chaque zone déterminée par les frontières et les fronts, la température en chaque noeud au moyen d'un schéma de Crank-Nicolson.

On procède ensuite à deux tests. L'un consiste à savoir si la frontière qui sépare le matériau du fluide caloporteur a dépassé la température  $T_{ph}$  (cas de la fusion), l'autre si la chaleur emmagasinée dans chacun des fronts d'épaisseur  $\Delta y^*$  est au moins égale à la chaleur latente nécessaire pour provoquer le déplacement. Le premier test étant prioritaire sur le second. Si l'une de ces éventualités s'est produite, on calcule alors par itération l'instant exact du phénomène, on mémorise la nouvelle disposition des zones et des fronts et l'on recommence le processus.

La méthode testée sur le problème classique de Stefan-Neuman donne une concordance parfaite, à l'échelle du tracé, des profils de température. Pour ce qui concerne le front, la progression est légèrement plus rapide dans notre méthode, avec un excès de l'ordre de 2%.

IV. RESULTATS

Modèle plan

Nous examinerons tout d'abord les résultats obtenus sur un exemple particulier pour lequel  $P_h = 0.5$ ;  $F_0 = 2$ ;  $B = 100$ ;  $\lambda^* = 1$ ;  $\kappa^* = 1$ ;  $\rho^* = 1$ .

Cet exemple correspond sensiblement au cas d'une plaque de parafine de 12 cm d'épaisseur sur les deux faces de laquelle circule un fluide caloporteur dont la température varie sinusoidalement autour de la valeur moyenne  $T_{ph} = 54^\circ\text{C}$  avec une amplitude de  $20^\circ\text{C}$  et une période de 24 h. Le coefficient de transfert  $\alpha$  est suffisamment grand ( $470 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ )

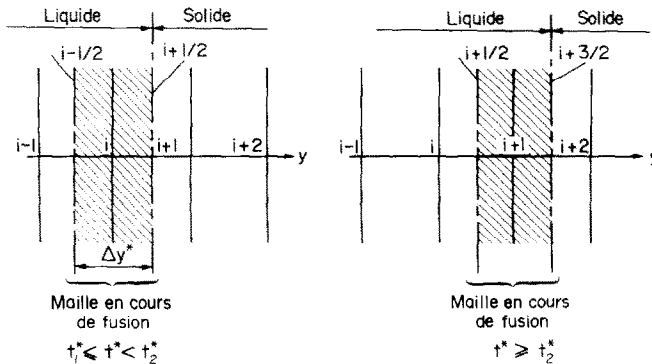


FIG. 2. Schématisation numérique du déplacement d'un front.

Ainsi Fig. 2, un front qui vient d'être localisé au noeud  $i$  à l'instant  $t_1^*$  se déplacera vers le noeud  $i + 1$  à l'instant  $t_2^*$  défini à partir de l'équation (18) par la relation:

$$\int_{t_1^*}^{t_2^*} \left[ \left( \frac{\partial T_s^*}{\partial y^*} \right)_{i-1/2} - \lambda^* \left( \frac{\partial T_l^*}{\partial y^*} \right)_{i+1/2} \right] dt^* = \frac{\Delta y^* \cdot \bar{\rho}}{F_0 \cdot P_h} \quad (19)$$

De même à l'instant où la température de la frontière devient égal à  $T_{ph}$  un nouveau front apparaît autour du premier noeud. Il est clair que lorsque le nombre de noeuds augmente indéfiniment, le déroulement du calcul tend vers l'évolution réelle du problème physique.

Suivant les valeurs des paramètres  $F_0$  et  $P_h$ , nous avons travaillé avec un nombre de mailles compris entre 40 et 80.

Des essais de diminution progressive de  $\Delta y^*$  nous ont clairement montré que, si l'on prend comme critère la quantité de chaleur accumulée dans l'élément sur une demi-période et si l'on se contente sur cette grandeur d'une précision de 1 à 2%, il n'est pas nécessaire de localiser plus finement les fronts.

Dans tous les cas, les écarts—en régime sinusoïdal—entre les quantités de chaleur, stockées et déstockées pendant une période ne dépassent pas 2%.

pour que les températures des frontières de la plaque soient sensiblement voisines de celles du fluide.

Cet exemple a été choisi pour illustrer le développement simultané de deux fronts, toutefois, comme nous le verrons plus loin l'épaisseur de la plaque n'est pas optimale.

La Fig. 3 nous donne quelques profils de température dans une demi-plaque ( $0 \leq y^* \leq 1$ ) à différents instants de la seconde période ( $1 \leq t^* \leq 2$ ). Les courbes ④ et ⑧ correspondent à deux instants où le flux est nul à la paroi, c'est à dire au début et à la fin de la phase de déstockage ( $1,431 \leq t^* \leq 1,931$ ). La Fig. 4 représente la propagation des fronts de fusion et de solidification pendant le même laps de temps. On remarque que partant à  $t^* = 1$  d'une plaque entièrement à l'état solide, un front de fusion se déplace progressivement jusqu'à  $t^* = 1,5$ . A cet instant (Fig. 3—courbe ⑤) la température de la frontière redevient égale à  $T_{ph}$  ( $T^* = 0$ ) et un front de solidification se développe alors que le front de fusion est quasiment stoppé.

Une zone liquide est ainsi encadrée par deux zones solides ( $1,5 \leq t^* \leq 2$ ). A l'instant  $t^* = 2$  les deux zones solides se rejoignent et le cycle reprend. 80% seulement de la plaque participe effectivement aux

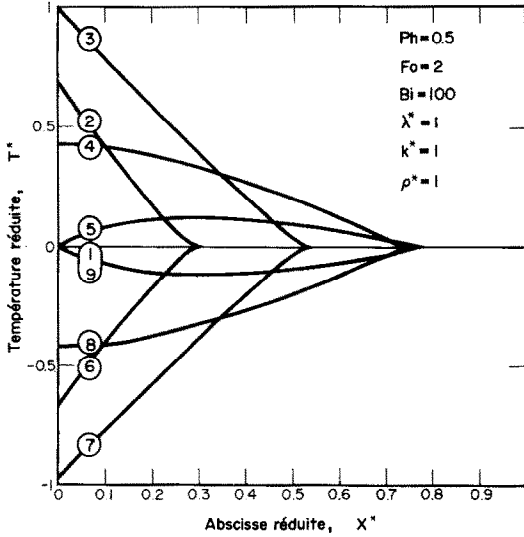


FIG. 3. Profils de températures dans le matériau fusible. ①  $t^* = 1.000$ ; ②  $t^* = 1.125$ ; ③  $t^* = 1.431$ ; ④  $t^* = 1.431$ ; ⑤  $t^* = 1.500$ ; ⑥  $t^* = 1.625$ ; ⑦  $t^* = 1.750$ ; ⑧  $t^* = 1.931$ ; ⑨  $t^* = 2.000$ .

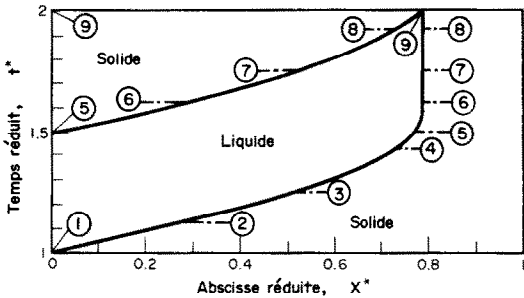


FIG. 4. Propagation des fronts dans la plaque.

transferts de chaleur, la zone solide  $y^* < 0,8$  est thermiquement inerte.

On peut tirer de cet exemple quelques conclusions à portée assez générale. Dans tous les cas, le processus de changement de phase accélère notablement le temps d'établissement du régime (2 à 3 périodes seulement). Lorsque  $\lambda^* = \kappa^* = 1$  et que  $T_m = T_{Ph}$  la zone liquide interstitielle disparaît simultanément ou avant le début d'une nouvelle fusion. Il ne semble donc pas qu'il puisse y avoir dans ces conditions coexistence de trois fronts.

Une autre constatation intéressante relève de l'examen de la courbe ⑥ qui correspond à l'instant  $t^* = 1,625$  pour lequel deux fronts existent aux abscisses  $y^* \approx 0,25$  et  $y^* \approx 0,8$ . On remarque que la zone liquide correspondante est pratiquement à température uniforme  $T_{Ph}$ . Ceci implique qu'il ne peut y avoir naissance de courant convectif dans cette région. En contrepartie dans l'étape de fusion ( $1 \leq t^* \leq 1,5$ ) les écarts de température entre la frontière et le front peuvent atteindre dans cet exemple le niveau  $T_0$  (courbe ③  $t^* = 1,25$ ) et la convection naturelle peut alors devenir un mode de transfert prépondérant devant la conduction.

Comme nous venons de la voir, la capacité de stockage du matériau peut ne pas toujours être utilisée au maximum. Nous adopterons donc avec Bardon *et al.* [1] la notion de taux d'utilisation  $Q^*$  rapport entre la quantité de chaleur  $Q$  réellement stockée et la quantité de chaleur maximum stockable  $Q_{max}$  ( $\alpha \rightarrow \infty$  et  $\lambda_s = \lambda_l \rightarrow \infty$ )

$$Q^* = Q/Q_{max}$$

$$Q_{max} = \rho_s V \Delta h_f + (\rho_s c_s + \rho_l c_l) V T_0. \quad (20)$$

La Fig. 5 donne pour différentes valeurs de  $B_i$  la variation de  $Q^*$  en fonction de  $F_0$  avec  $P_h = 0.5$ .

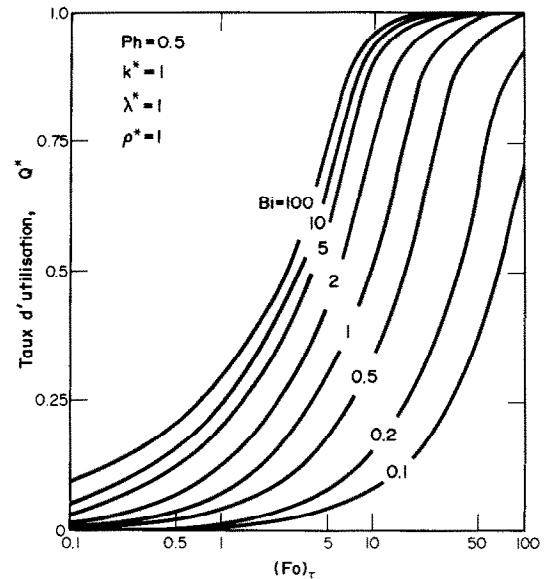


FIG. 5. Variation du taux d'utilisation  $Q^*$  avec  $F_0$  et  $B_i$  — cas du plan ( $P_h = 0.5$ ).

Pour  $B_i > 100$ ,  $Q^*$  ne varie plus à  $P_h$  et  $F_0$  constants, le fluide impose sa température à la surface limite du stock. Par ailleurs, comme dans cet exemple, on a choisi  $\lambda^* = \kappa^* = \rho^* = 1$ , on stocke et déstocke la même quantité de chaleur pendant la même durée, à savoir une demi-période. Cette particularité constitue un moyen de tester la validité du modèle numérique. On remarque, que le taux d'utilisation est d'autant plus voisin de l'unité que  $F_0$  est grand. Ainsi pour une période et un matériau donnés, on aura intérêt à fractionner le stockage en éléments de faibles dimensions.

Afin de pouvoir comparer nos résultats à ceux obtenus dans le cas du stockage par chaleur sensible, nous introduirons deux nouveaux paramètres adimensionnels  $\beta$  et  $\gamma$  liés à  $B_i$  et  $F_0$  par les relations:

$$\beta = \left(\frac{\pi}{F_0}\right)^{1/2} = l \left(\frac{\pi}{\tau \cdot k_s}\right)^{1/2}; \quad \gamma = \frac{B_i}{\beta} = \frac{\alpha}{b_s} \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{1/2} \quad (21)$$

et le paramètre  $\gamma$  ne dépend pas de l'épaisseur  $l$  de la plaque.

Cherchons à exprimer la quantité de chaleur stockée par unité de surface d'échange  $q$  en faisant apparaître une fonction  $g(\beta, \gamma, \kappa^*, \lambda^*, \rho^*, R_i^*, P_h)$

analogue à celle introduite par Gröber [21] et Bardon [1].

$$q = \frac{Q}{S} = 2\rho_s c_s T^0 \eta \frac{V}{S} Q^* = \frac{2}{\pi^{1/2}} b_s \tau^{1/2} T^0 \eta \beta \xi Q^* \quad (22)$$

avec

$$\eta = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\lambda^*}{\kappa^*} + \frac{\rho^*}{P_h} \right) \text{ et } \xi = 1 + \frac{1}{2R_i^*} \quad (23)$$

on peut donc poser:

$$q = b_s \tau^{1/2} T^0 g(\beta, \gamma, \kappa^*, \lambda^*, \rho^*, R_i^*, P_h) \quad (24)$$

avec:

$$g = \frac{2}{\pi^{1/2}} \beta \xi \eta Q^*. \quad (25)$$

Pour le modèle plan  $\xi = 1$ .

On retrouve la même propriété que dans le cas des milieux non fusibles. A  $\gamma$  constant, la fonction  $g$  présente un maximum pour une valeur optimale de  $\beta$ . Il existe donc pour chaque processus périodique une épaisseur optimum  $l_{opt} = \beta_{opt}(\kappa_s \tau / \pi)^{1/2}$  pour laquelle la quantité de chaleur (dé)stockée par unité de surface d'échange est maximale. Cette épaisseur dépend de la nature du matériau de stockage et du coefficient de transfert  $\alpha$ . Les Figs. (6) et (7) illustrent ceci pour les valeurs respectives  $P_h = 0.5$  et  $P_h = 0.05$ .

Reprenons l'exemple précédent de la paraffine ( $P_h = 0.5$ ,  $\gamma = \infty$ ). L'épaisseur choisie  $2l = 12$  cm correspond à  $\beta = 1.3$ . Notons  $\bar{Q}_2$  l'énergie stockée par unité de volume dans ce cas. Cherchons maintenant à optimiser le stock à partir des résultats de la Fig. 6. Pour  $\gamma = \infty$ , il apparaît une valeur optimale de  $\beta$  égale à 0.78, soit une épaisseur  $2l = 7.2$  cm. Notons  $\bar{Q}_1$  l'énergie stockée, par unité de volume correspondante.

Si l'on forme le rapport  $\bar{Q}_1 / \bar{Q}_2 = Q_1^* / Q_2^*$  on aboutit à la valeur 1.85 (Fig. 5). Le gain apporté par l'optimisation est donc très sensible puisque pour un même volume de matériau, on stockera 1.85 fois plus d'énergie dans la plaque de 7.2 cm d'épaisseur que dans celle de 12 cm.

On peut également chercher à comparer l'énergie stockée, dans des matériaux fusibles et non fusibles. Toutefois, à ce niveau, le rapport des énergies volumiques n'est plus un critère suffisant et le coût du matériau devient un élément d'appréciation prépondérant. Pour fixer les idées, nous comparerons néanmoins la paraffine avec  $2l_{opt} = 7.2$  cm et le béton avec  $2l_{opt} = 30.8$  cm les conditions d'échange étant égales par ailleurs. Si l'on note  $\bar{Q}_3$  l'énergie volumique stockée dans le béton, le rapport  $\bar{Q}_1 / \bar{Q}_3 = Q_1^* / Q_3^* = 1.15$ .

Lorsque  $P_h$  diminue (Fig. 7) le maximum est remplacé par un palier qui permet également de définir une valeur  $\beta_{opt}$ . A noter également que lorsque  $P_h$  décroît (forte chaleur latente) les valeurs de  $\beta_{opt}$  correspondent à un taux d'utilisation  $Q^*$  croissant. Dans tous les cas le début du palier est lié à une valeur de  $\beta$  pour laquelle le stock est entièrement fondu à chaque période.

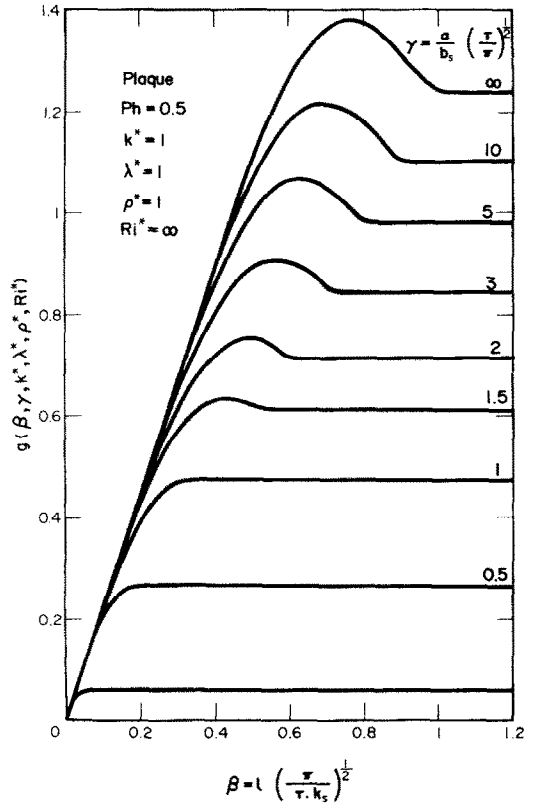


FIG. 6. Etude de la fonction  $g$  pour  $P_h = 0.5$ —cas du plan.

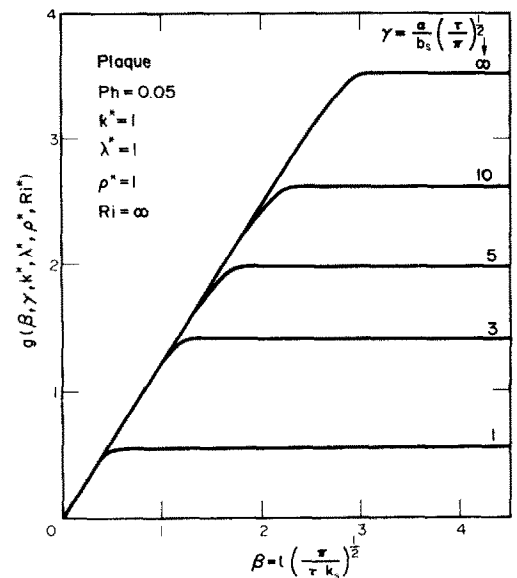


FIG. 7. Etude de la fonction  $g$  pour  $P_h = 0.05$ —cas du plan.

Modèle cylindrique

Il peut être intéressant de comparer les configurations planes et cylindriques. Ici rappelons-le, le fluide caloporteur circule dans le tuyau intérieur entouré d'une couronne de matériau fusible d'épaisseur  $l$ , les déperditions extérieures étant supposées nulles. Dans ce problème apparaît un nouveau paramètre  $R_i^* = R_i / l$  lié au choix du

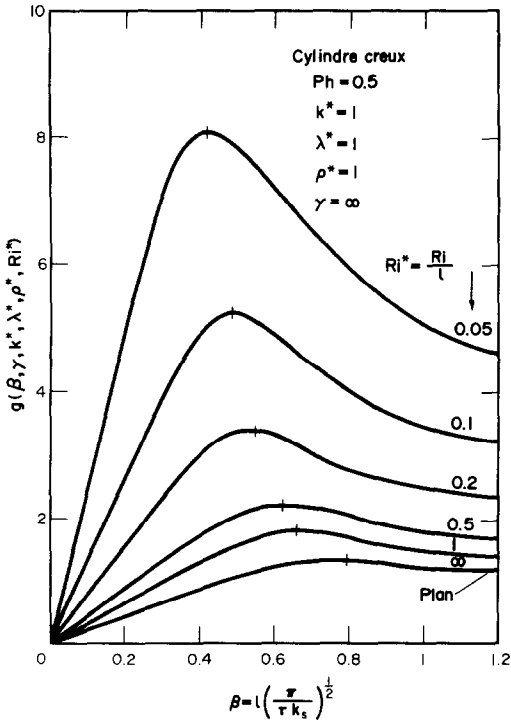


FIG. 8. Etude de la fonction  $g$  pour  $P_h = 0.5$  et  $\gamma$  infini—  
influence du paramètre  $R_i^*$ —cas du cylindre.

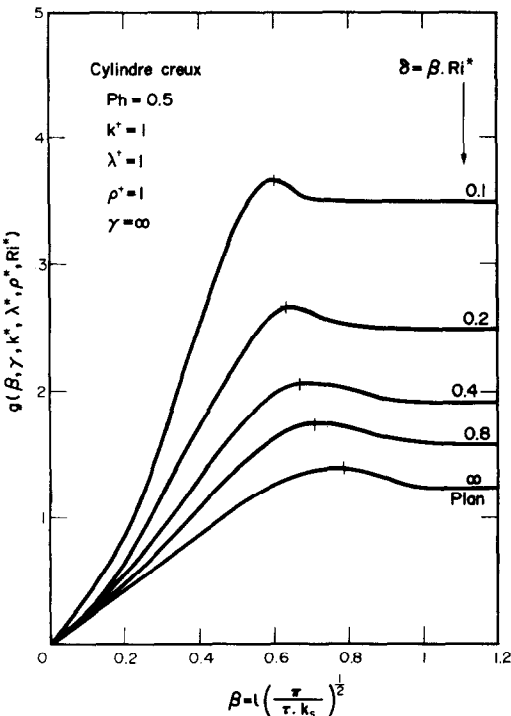


FIG. 9. Etude de la fonction  $g$  pour  $P_h = 0.5$  et  $\gamma$  infini—  
influence du paramètre  $\delta$ —cas du cylindre.

diamètre du tuyau intérieur. Si l'on trace (Fig. 8) la fonction  $g(\beta^*, \gamma^*, \kappa^*, \rho^*, R_i^*)$  pour  $\gamma \rightarrow \infty$  et  $P_h = 0.5$  en fonction de  $\beta$  pour diverses valeurs de  $R_i^*$ , on constate encore pour chaque  $R_i^*$  une valeur optimale de  $\beta$ . Pour chaque valeur de  $R_i$  il existe donc une épaisseur optimale et vice-versa. En général,  $R_i$  sera

fixé par la conception du dispositif de stockage, il sera donc utile de représenter la fonction  $g$  paramétrée par un nombre ne faisant pas intervenir l'épaisseur comme  $R_i^*$ . Nous avons choisi (Fig. 9)

$$\delta = \beta R_i^* = R_i \left( \frac{\pi}{\tau \kappa_s} \right)^{1/2} \quad (24)$$

Il est clair que si  $\delta \rightarrow \infty$  ( $R_i^* \rightarrow \infty$ ), on retrouve le cas du plan. On remarque également que lorsque  $\delta$ —  
donc  $R$  décroît—la fonction  $g$  croît notablement.

On peut donc se demander s'il est réellement intéressant de choisir de faibles diamètres de tube en dépit de l'accroissement des pertes de charges.

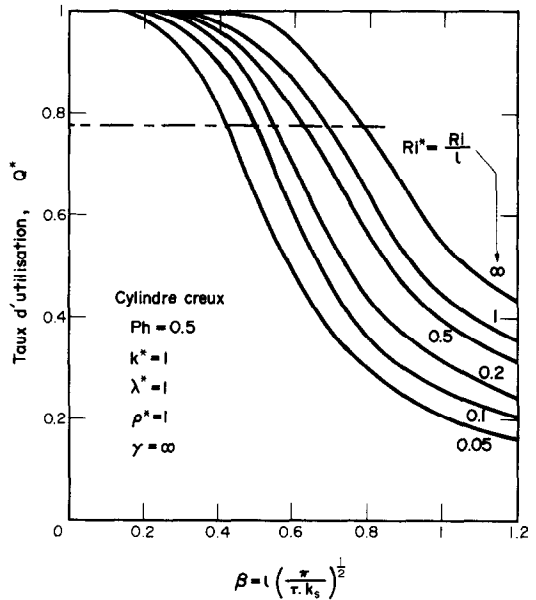


FIG. 10. Variation du taux d'utilisation  $Q^*$  avec  $\beta$  et  $R_i^*$ —  
( $P_h = 0.5$   $\gamma$  infini)—cas du cylindre.

Si l'on reporte sur la Fig. 10 les valeurs optimales de  $\beta$  correspondant à chaque valeur de  $R_i^*$ , on constate que  $Q^*$  est sensiblement constant et égal à 0.78 dans le cas  $P_h = 0.5$ ,  $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $\kappa^* = \lambda^* = \rho^* = 1$  et  $R_i^* > 0.05$ . Il en résulte une conclusion importante: pour l'épaisseur optimale, l'énergie volumique (dé)stockée dans une plaque ou une couronne cylindrique est sensiblement constante lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$  (c'est à dire pour les grandes valeurs de  $\alpha$ ). Pour des valeurs plus faibles de  $\gamma$ , la géométrie cylindrique est légèrement moins performante que la géométrie plane. Les écarts sont d'autant plus importants que le rayon intérieur du cylindre décroît. Ainsi dans l'exemple de la paraffine le rapport  $\bar{Q}_{cyl}/\bar{Q}_{plan} = 0.9$  dans le cas  $\gamma = 5$ ,  $\beta = \beta_{opt} = 0.48$ ,  $R_i^* = 0.5$  (soit:  $l = 22$  mm,  $R_i = 11$  mm,  $\alpha = 30$  W  $m^{-2} K^{-1}$ ).

*Desequilibre des durées de stockage et de déstockage*

Dans tous les exemples qui précèdent, nous n'avons pas tenu compte, des différences des caractéristiques thermophysiques entre la phase liquide et la phase solide. Pour de nombreuses substances on

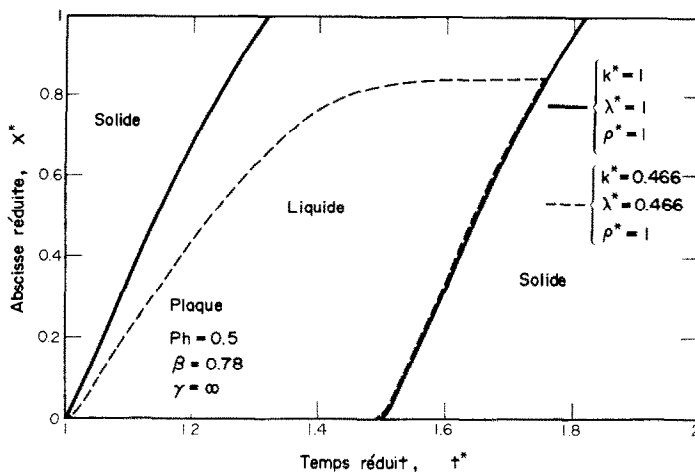


FIG. 11. Influence de  $\kappa^*$  et  $\lambda^*$  sur la propagation du (des) front(s).

ne possède souvent que les valeurs qui correspondent à l'état solide. Nous avons cherché pour une plaque de paraffine à étudier l'influence du rapport des conductivités  $\lambda^* = \lambda_l/\lambda_s$ . Nous nous sommes donc placés pour  $\gamma \rightarrow \infty$  à la valeur  $\beta_{opt} = 0.78$  trouvée pour  $\lambda^* = 1$  et nous avons comparé ces résultats à ceux obtenus pour  $\lambda^* = \kappa^* = 0.466$ , ( $\lambda_s = 0.27 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ;  $\lambda_l = 0.126 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ) dans les mêmes conditions.

La Fig. 1 illustre la propagation des fronts en trait plein dans le premier cas en pointillé dans le second. La plus faible conductivité de la phase liquide ralentit suffisamment le déplacement du front de solidification pour que seule une fraction de la plaque (85%) ne soit fondue au bout d'une période. Le stockage n'est plus optimal. La durée du stockage est de  $0.575\tau$  et celle du déstockage est de  $0.425\tau$ . Le taux d'utilisation  $Q^*$  est passé de 0.78 à 0.63. Il s'agit donc d'un paramètre important dont il faudra tenir compte dans une étude de système.

Un autre facteur de déséquilibre qui perturbe en outre l'efficacité du stockage réside dans l'écart relatif  $\Theta^* = (T_{ph} - T_m)/T_0$ . On a montré que si l'on optimise le stock à la valeur  $\beta_{opt}$  correspondant à  $\Theta^* = 0$ , la quantité de chaleur (dé)stockée décroît régulièrement lorsque  $\Theta^*$  augmente jusqu'à une valeur minimale obtenue pour  $\Theta^* = 1$ , relative à la seule chaleur sensible. Parallèlement, on constate que pour  $0 < \Theta^* < 1$  la durée du stockage est supérieure à celle du déstockage. On a donc intérêt à se placer le plus près possible du cas  $\Theta^* = 0$ .

## V. CONCLUSION

L'étude qui précède a permis de mettre en évidence les paramètres adimensionnels qui régissent les phénomènes périodiques de stockage dans un matériau fusible. On constate que de façon analogue au stockage par chaleur sensible, il existe dans chaque situation, une épaisseur optimale pour laquelle la quantité de chaleur (dé)stockée par unité de surface d'échange est maximale. Compte tenu de cette optimisation et à volume de stock égal la géométrie cylindrique (fluide, caloporteur interne) est

légèrement plus défavorable que la géométrie plane. Ce handicap disparaît si le paramètre  $\gamma$  est suffisamment important.

Dans le cas d'un milieu non optimisé (épaisseur surévaluée) deux fronts peuvent exister simultanément, toutefois la coalescence se produit avant le début d'un nouveau cycle.

Par ailleurs, le temps d'établissement du régime périodique est considérablement réduit par le processus de changement de phase. Dans le cas où la température initiale du stock est égale à  $T_{ph}$ , le régime établi s'obtient en deux ou trois périodes.

On a montré également qu'il était important de tenir compte des variations de caractéristiques thermophysiques entre les phases solide et liquide et que l'on avait grand intérêt à faire en sorte que la température moyenne du fluide caloporteur s'écarte peu de la température de fusion du matériau.

Signalons enfin que le programme de simulation qui a été mis au point est susceptible de s'adapter à n'importe quel type de conditions aux limites pouvant apparaître dans des applications concrètes. Il permet—sous réserve de validité des hypothèses adoptées—de procéder à une estimation des dimensions optimales d'un stock dans le cas d'une utilisation à caractère périodique.

## BIBLIOGRAPHIE

1. J. P. Bardon, B. Fourcher et B. Cassagne, Stockage périodique par chaleur sensible—aspects fondamentaux liés à la cinétique des transferts, *Int. J. Heat Mass Transfer* (A paraître).
2. B. Fourcher, J. Bransier, B. Cassagne et J. P. Bardon, Stockage périodique de chaleur—aspects fondamentaux liés à la cinétique des transferts, *Proc. VIe Congrès Int. sur les Transferts de Chaleur*, Toronto (Août 1978).
3. E. M. Sparrow, S. V. Patankar and S. Ramadhyani, Analysis of melting in presence of natural convection in the melt region, *J. Heat Transfer* **99**, 520–526 (1977).
4. P. H. Price and M. R. Stack, The effect of latent heat on numerical solutions of the heat flow equations, *Br. J. Appl. Phys.* **5**, 285–287 (1954).
5. E. L. Albasiny, The solution of non-linear heat conduction problems on the Pilot Ace, *Proc. Inst. Electric. Engng* **103**, B, Suppl. 1, 158–162 (1956).
6. A. K. Fleming, The numerical calculation of freezing



- processes, *Proc. XIII Int. Cong. Refrig.* **2**, 303–311 (1971).
7. C. Bonacina, G. Comini, A. Fasano and M. Primicerio, Numerical solution of phase change problems, *Int. J. Heat Mass Transfer* **16**, 1825–1832 (1973).
  8. K. Katayama and M. Hattori, Research on heat conduction with freezing (1st report: numerical method on Stefan's problem, *Bull. J.S.M.E.* **18**(115), 41–46 (1975).
  9. A. C. Cleland and R. L. Earle, The third kind of boundary conditions in numerical freezing calculations, *Int. J. Heat Mass Transfer* **20**, 1029–1034 (1977).
  10. C. Bonacina, G. Comini, A. Fasano and M. Primicerio, On the estimation of thermophysical properties in non linear heat conduction problems, *Int. J. Heat Mass Transfer* **17**, 861–867 (1974).
  11. C. Bonacina and G. Comini, On the solution of non linear heat conduction equations by numerical methods, *Int. J. Heat Mass Transfer* **16**, 581–589 (1973).
  12. M. Lees, A linear three level difference scheme for quasi-linear parabolic equations, *Math. Comput.* **20**, 516–522 (1966).
  13. G. Comini, S. Del Giudice, R. W. Lewis and O. C. Zienkiewicz, Finite element solution of non-linear heat conduction problems with special reference to phase change, *Int. J. Num. Meth. Engng* **8**, 613–624 (1974).
  14. N. R. Eyres, D. R. Hartree, J. Ingham, R. Jackson, R. J. Sargant and J. B. Wagstaff, The calculation of variable heat flow in solids, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **240**, 1n (1947).
  15. N. D. Murray and F. Landis, Numerical and machine solutions of transient heat conduction problems involving melting or freezing, *J. Heat Transfer* **81**, 106–112 (1959).
  16. W. L. Heitz and J. W. Westwater, Extension of numerical method for melting or freezing problems, *Int. J. Heat Mass Transfer* **13**, 1371–1375 (1970).
  17. J. Crank, Two methods for the numerical solution of moving boundary problems in diffusion and heat flow, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **10**, 220–231 (1957).
  18. L. W. Ehrlich, A numerical method for solving a heat flow problem with moving boundary, *J. Ass. Comput. Mach.* **5**(2), 161–176 (1958).
  19. J. B. Rivard and M. R. Scott, The two phase three zone melting problems—Response to pulse heating, *Appl. Math. Comp.* **2**, 173–187 (1976).
  20. K. Mastanaiah, On the numerical solution of phase change problems in transient non linear heat conduction, *Int. J. Num. Meth. Engng* **10**, 833–844 (1976).
  21. H. Gröber, S. Erk and U. Grigull, *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*. Springer, Berlin (1963).

#### PERIODIC STORAGE BY LATENT HEAT ON THE FUNDAMENTAL ASPECTS OF THE KINETICS OF TRANSFERS

**Abstract**—In this paper the thermal behavior of a phase change material element bounded by a fluid whose temperature varies periodically in time, is examined. Two cases have been envisaged, those of the plate and the hollow cylinder. The numerical method proposed, allows one to solve the multi-boundary problems.

In a way very similar to the case of sensible heat storage, it is established that for a given material and for a fixed time it exists an optimal thickness for which the stored energy per unit of exchange surface is maximum. It is remarked that a cylindrical form, in particular for small inner radii, is slightly less suitable than the plane configuration. In all the situations envisaged in this study, it has never been observed more than two simultaneous boundaries. Further it is shown that the optimal thickness corresponds to one case of total melting of the storage.

#### PERIODISCHE SPEICHERUNG DURCH LATENTWÄRME GRUNDLAGEN DER KINETIK DER WÄRMEÜBERTRAGUNG

**Zusammenfassung**—In dieser Arbeit wird das thermische Verhalten eines phasenwechselnden Material-Elements in einer Flüssigkeitsumgebung mit periodisch veränderlicher Temperatur untersucht. Zwei Fälle wurden behandelt, die der Platte und des Hohlzylinders. Die vorgeschlagene Rechenmethode gestattet es, die durch mehrere Ränder gekennzeichneten Randwertprobleme zu lösen. Aus ähnliche Art wie bei der sensiblen Wärmespeicherung wird festgestellt, daß für ein bestimmtes Material und für eine bestimmte Zeit eine optimale Schichtdicke existiert, für die die gespeicherte Energie pro Austauschfläche ein Maximum ist. Es wird hervorgehoben, daß eine zylindrische Form, besonders für kleinere Innenradien, etwas schlechter ist als die ebene Form. Bei allen in dieser Studie behandelten Fällen wurden nie mehr als zwei gleichzeitige Randbedingungen beobachtet. Weiterhin wird gezeigt, daß die optimale Schichtdicke einem Fall mit vollständigem Schmelzen des Speichermediums entspricht.

#### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ АСПЕКТОВ КИНЕТИКИ ПЕРЕНОСА ДЛЯ РАСЧЁТА ПЕРИОДИЧЕСКОГО НАКОПЛЕНИЯ УДЕЛЬНОЙ ТЕПЛОТЫ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

**Аннотация**— В статье исследуется тепловой режим образца при наличии фазовых переходов, когда образец окружен жидкостью, температура которой периодически изменяется во времени. Рассматривались два случая: пластина и пустотелый цилиндр. Предложенный численный метод позволяет решать задачи с несколькими границами.

С помощью метода, аналогичного используемому при определении теплосодержания, установлено, что для данного материала при фиксированном значении времени существует оптимальная толщина, при которой величина энергии, подводимой к единице площади поверхности обмена, является максимальной. Отмечено, что несколько предпочтительнее использовать тела плоской, нежели цилиндрической, конфигурации в особенности при небольших значениях внутреннего радиуса. Кроме того, показано, что оптимальная толщина соответствует случаю полного плавления.